

# 2008 年湖南省大学生数学竞赛试题（数学专业类）

1. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\tan x}{x}$ 。

2. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ , 当  $xy = 0$  时, 求  $f''_{xy}(x, y)$ 。

3. 计算三重积分  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2 - x^2y + xy + y^2) dx dy dz$ 。

4. 计算第一型曲线积分  $\int_{\Gamma} y^2 ds$ , 其中  $\Gamma$  为下列方程组确定的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + z = a. \end{cases} (a > 0).$$

5. 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  附近可微。  $f(0)=0, f'(0)=a$ 。定义数列

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^3}\right) + f\left(\frac{2}{n^3}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^3}\right),$$

证明  $\{x_n\}$  有极限并求其值。

6. 设  $f(x)$  是实系数多项式。

(1) 证明:  $x_0$  是  $f(x)$  的一个重根当且仅当  $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ 。

(2) 若  $2x^3 + 3x^2 - 12x + a = 0$  有重根, 试确定常数  $a$ 。

(3) 设  $p(x), q(x)$  均为多项式。证明: 若  $\frac{p(x)}{q(x)}$  有极值, 则存在常数  $\lambda$  使得  $p(x) - \lambda q(x)$  有

重根。

(4) 上述逆命题是否成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 举出反例。

7. 证明函数  $x, \sin x, e^x$  在任意区间上是线性无关的。

8. (1) 假设连续可微函数  $f(x)$  满足微分不等式  $m \leq f(x) + f'(x) \leq M, x \in I$ , 其中  $m, M$

时常数,  $I$  是区间。证明: 存在常数  $C_1, C_2$ , 使得  $m + C_1 e^{-x} \leq f(x) \leq M + C_2 e^{-x}, x \in I$ 。

(2) 如果二次连续可微函数  $f(x)$  满足微分不等式  $m \leq f''(x) + 2f'(x) + f(x) \leq M, x \in I$ ,

其中  $m, M$  为常数,  $I$  是区间。试对  $f(x)$  给出类似结论 1 的估计式 (不需要证明过程)。

9. 设  $V$  是数域  $\Omega$  上向量空间,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  是  $V$  中一组线性无关的向量,

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0, a_i \in \Omega \right\}$$

证明  $T$  是  $V$  的子空间, 且  $\dim T = n-1$ 。

10. 设  $A$  是半正定矩阵, 证明存在惟一个半正定矩阵  $B$  使得  $A = B^2$ 。